Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

Λογική σύνδεση των προτάσεων 1-26 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (με αναφορές σε κρυφές κοινές έννοιες κι αξιώματα)

Λογική συνάρτηση των προτάσεων 1-26

Ουδέτερη Γεωμετρία

Με τον όρο αυτό , δηλ. ουδέτετερη ή απόλυτη Γεωμετρία, εννοούμε τις προτάσεις 1-28 του πρώτου βιβλίου του ευκλείδη, οι οποίες, είναι ανεξάρτητες από το περίφημο πέμπτο αίτημα των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, οι προτάσεις 1-26, αποτελούν την λεγομένη γεωμετρία των σημείων, γραμμών γωνιών και τριγώνων.

Παραθέτουμε παρακάτω τους 23 ορισμούς (όρους) , τα 5 αξιώματα (Αιτήματα) και τις 26 προτάσεις από το πρωτότυπο κείμενο θέτοντας μόνο τις επικεφαλίδες. Ανάμεσα στις κοινές έννοιες 4 και 5 παρεμβάλονται εντός αγκυλών και τρεις άλλες που υπάρχουν στην έκδοση Βαρλαάμ -Δασυποδίου , αλλάξαμε όμως την αρίθμηση. Η κοινή έννοια 9 εμφανίζεται στην Ι.4. και παρατίθεται επίσης.

Όροι (Ορισμοί)

1. Σημεῖό ν ἐστιν, οὗ μέρος οὐ θέν.

2. Gramm¾ dὲ μῆκος ἀπλατές.

3. GrammÁj dὲ πέρατα σημεῖα.

4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥ τις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

5. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μό νον ἔχει.

6. 'Epif ane.aj dὲ πέρατα γραμμαί.

7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥ τις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

8. 'Ep.pedoj dὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύ ο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸ ς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

9. “Otan dὲ αἱ περιέχουσαι τὴ ν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύ γραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

10. “Otan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ ὀ ρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀ ρθῆς.

12. Oxeκa dὲ ἡ ἐλάσσων ὀ ρθῆς.

13. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινό ς ἐστι πέρας.

14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅ ρων περιεχό μενον.

15. Κύ κλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχό μενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸ ς ἣν ἀφ' ἑνὸ ς σημείου τῶν ἐντὸ ς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸ ς τὴ ν τοῦ κύ κλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

16. Kšntron dὲ τοῦ κύ κλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

17. Di£metroj dὲ τοῦ κύ κλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύ κλου περιφερείας, ἥ τις καὶ δίχα τέμνει τὸ ν κύ κλον.

18. Ἡμικύ κλιον δέ ἐστι τὸ περιεχό μενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. kšntron dὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό , ὃ καὶ τοῦ κύ κλου ἐστίν.

19. Σχήματα εὐθύ γραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχό - μενα, tr.pleura mὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, tetr£pleura dὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, polÚpleura dὲ τὰ ὑπὸ πλειό νων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχό μενα.

20. Tîn dὲ τριπλεύ ρων σχημάτων ἰσό πλευρον μὲν τρίγωνό ν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, „soskel ἐς δὲ τὸ τὰς δύ ο μό νας ἴσας ἔχον πλευράς, skalhnÕn dὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

21. ”Eti dὲ τῶν τριπλεύ ρων σχημάτων ὀ ρθογώνιον μὲν τρίγωνό ν ἐστι τὸ ἔχον ὀ ρθὴ ν γωνίαν, ¢mblugènion dὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, Ñxugènion dὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀ ξείας ἔχον γωνίας.

22. Tîn dὲ τετραπλεύ ρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσό πλευρό ν τέ ἐστι καὶ ὀ ρθογώνιον, ἑτερό μηκες δέ, ὃ ὀ ρθογώνιον μέν, οὐ κ ἰσό πλευρον δέ, ῥό μβος δέ, ὃ ἰσό πλευρον μέν, οὐ κ ὀ ρθογώνιον δέ, ·omboeidὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔ τε ἰσό πλευρό ν ἐστιν οὔ τε ὀ ρθογώνιον· t¦ dὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐ τῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλό μεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

••••••••

1. 'Aitήσθω ἀπὸ παντὸ ς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴ ν ἀγαγεῖν.

2. Kaˆ peperasmšnhn eÙqe‹an kat¦ tÕ sunecὲς ἐπ' εὐ- θείας ἐκβαλεῖν.

3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύ κλον γρά-

φεσθαι.

4.Kaˆ p£saj t¦j Ñrq¦j gwn.aj ‡saj ¢ll »l aij eἶναι.

5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

ΚΟΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

2.Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

3.Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

4.Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(6*).[Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

(7*.) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(8*.)Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

5.Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

(9*)Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

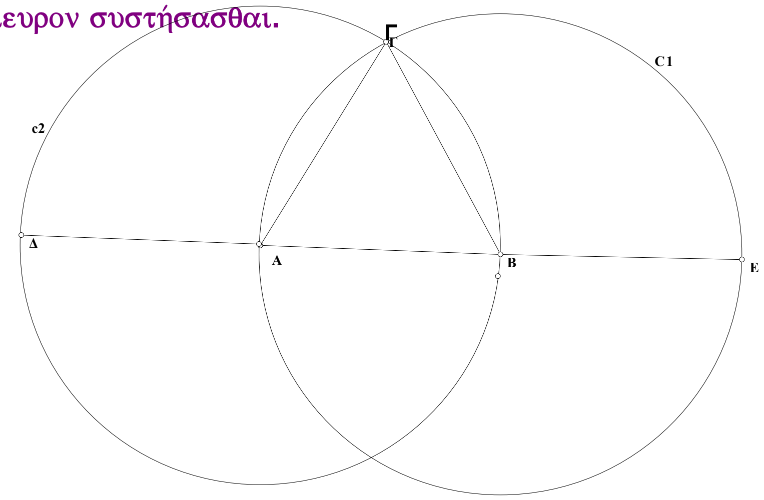
•••••••••

Κατωτέρω , παρατίθεται το αρχαίο κείμενο και οι αποδείξεις των προτάσεων 1-26 του βιβλίου Ι των Στοιχείων. Εντός των εγχρώμων παρενθέσεων γίνεται μνεία των όρων, αιτημάτων και κοινών εννοιών που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης.

=====================================

Ι.1

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον((ορ.20) συστήσασθαι.

Kšntr J mὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, (Αιτ.3) ka˜ p£l in kšntr J mὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους(ΑΞΙΩΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ) οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ. (Αξ.1)

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ·(Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, (Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ™de.cqh dὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· (Κ.Ε.1)καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

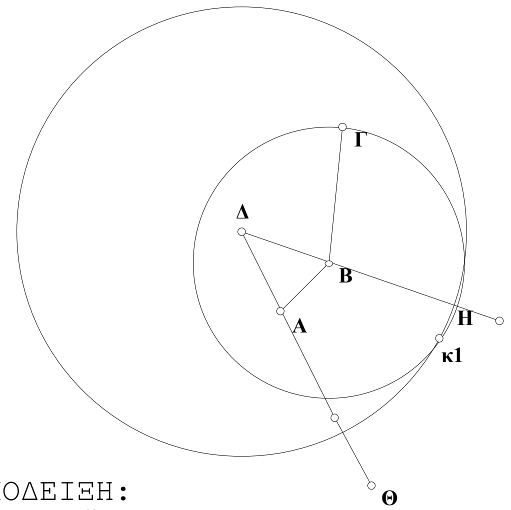
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I2.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

"Estw tÕ mὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ¹ dὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ(Αξ.1), καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευ-

ρον τὸ ΔΑΒ,(I.1) καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ,(Αξ.2) καὶ kšntrJ mὲν τῷ Β διαστήματι dὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ,(Αξ.3) καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.(αξ.3)

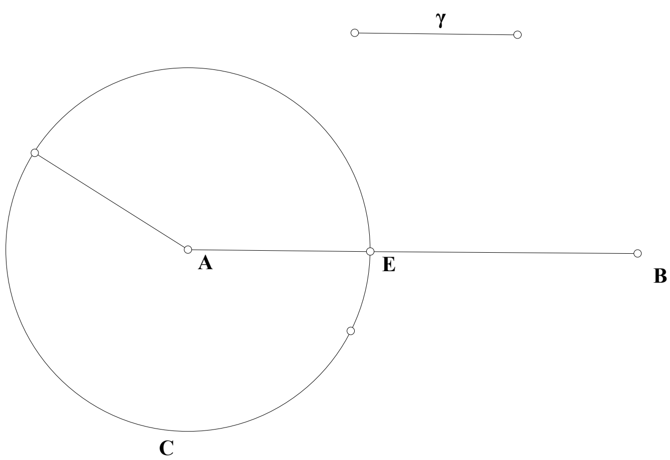
Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ·(Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. (Κ.Ε.3) ™de.cqh dὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα·(Κ.Ε.1) καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I3.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι

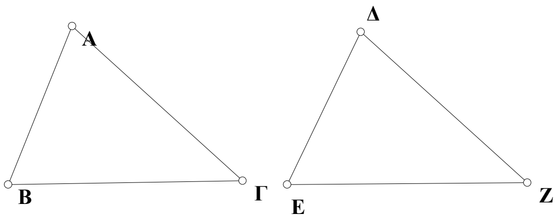
ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ
ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ
τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.
Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ
Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· (I.2)καὶ κέντρῳ
μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω
ὁ ΔΕΖ.(Αξ.3)

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου,
ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ·(Ορ.15) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση.
ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· (Κ.Ε.1)ὥστε καὶ ἡ
ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς
μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ·
ὅ περ ἔδει ποιῆσαι.

===

I.4 Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ
τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ
πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα
˜katšran ˜katšrv t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ
t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ
ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω,
ὅ τι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση
ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ

ὅ τι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση
ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ
τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ¹ mὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ¹ dὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ

ὑπὸ ΔΖΕ.

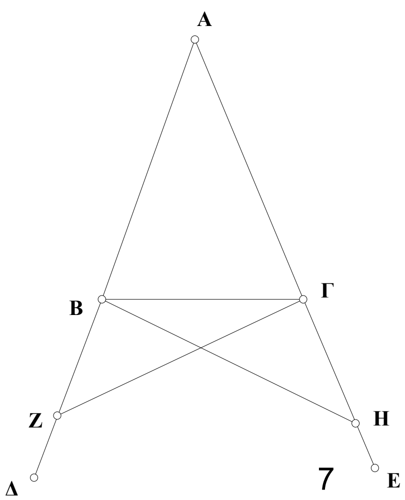
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ tr.gwnon ka^ tiqemšnou toà mὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεxon tÁj dὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β shmexon ™p^ tÕ Ε di¦ tÕ ‡shn eἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ eÙqexa ™p^ t¾n DZ di¦ tÕ ‡shn eἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεxon ™farmÒsei di¦ tÕ ‡shn p£lin eἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. e„ g¦r toà mὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ™farmÒsantoj toà dὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ

οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσινὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ··(K.E.9*) ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται·(K.E.4) ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, ·(K.E.4) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ¹ mὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ dὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

Ι5 Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
”Estw tr.gwnon „soskel ὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴ ν ΑΒ
πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ·(Op.20) καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ'
εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ,
ΓΕ· (Αξ.2)λέγω, Óti ¹ mὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία
τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ¹ dὲ ὑπὸ ΓΒΔ
τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν ση-
μεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μεί-
ζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση
ἡ ΑΗ, (Ι.3)καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ
εὐθεῖαι. (Αξ.1)

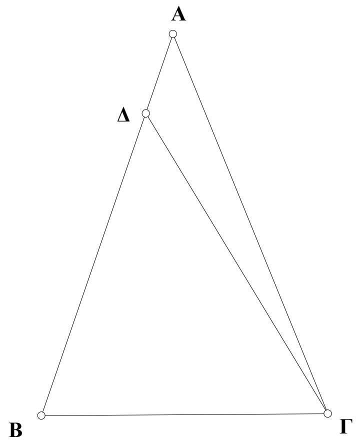
'Epeˆ oân ‡sh ™st^n ¹ mὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ,
δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα
ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ·
βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ
τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γω-
νίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,
ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ¹ mὲν ὑπὸ ΑΓΖ
τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ¹ dὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. (Ι.4)καὶ ἐπεὶ
ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν
ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ·(Κ.Ε.3) ἐδείχθη
dὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς
ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ
ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον
ἔσται, ·(Ι.4) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον-
ται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·
‡sh ¥ra ™st^n ¹ mὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ
ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία
ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ
ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ
ἐστιν ἴση··(Κ.Ε.3) καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.
™de.cqh dὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν
ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων
εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

**Ι.6 Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ
ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις
ἔσονται.**

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

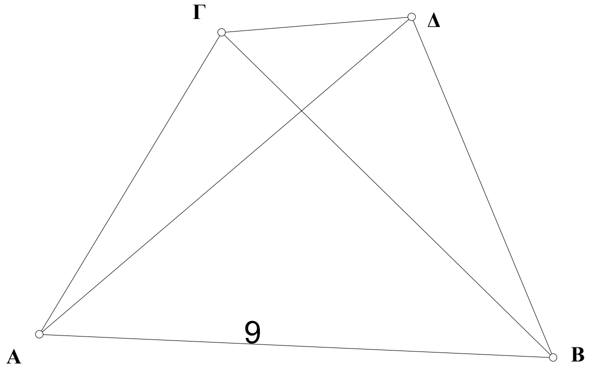


ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ·(κρυφό αξ.1) ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, ·(Ι.3) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, (Ι.4)καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον··(κρυφό αξ.2) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα. ·(κρυφό αξ.3)
Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
===

Ι.7 Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



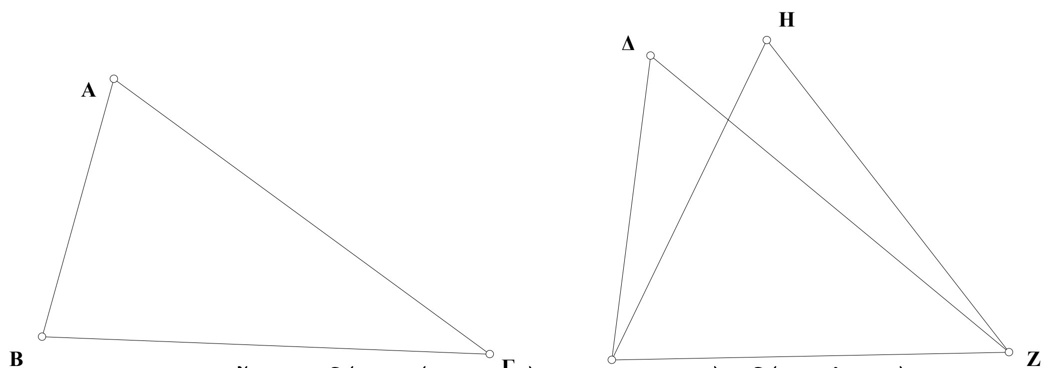
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εἰ γὰρ δυνατό ν, ἐπὶ τῆς αὐ τῆς εὐ θείας τῆς ΑΒ δύ ο ταῖς αὐ ταῖς εὐ θείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύ ο εὐ θεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸ ς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐ τὰ μέρη τὰ αὐ τὰ πέρατα ἔχουσαι, éste ‡shn eἶναι τὴ ν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐ τὸ πέρας ἔχουσαν αὐ τῇ τὸ Α, t¾n dὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐ τὸ πέρας ἔχουσαν αὐ τῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύ χθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΓΔ τῇ ὑ πὸ ΑΔΓ· (Ι.5)μείζων ἄρα ἡ ὑ πὸ ΑΔΓ τῆς ὑ πὸ ΔΓΒ··(κρυφό αξ.4) πολλῷ ἄρα ἡ ὑ πὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑ πὸ ΔΓΒ. ··(κρυφό αξ.5) πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑ πὸ ΔΓΒ.(ι.5) ™de.cqh dὲ αὐ - τῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅ περ ἐστὶν ἀδύ νατον.

Οὐ κ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐ τῆς εὐ θείας δύ ο ταῖς αὐ ταῖς εὐ - θείαις ἄλλαι δύ ο εὐ θεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸ ς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐ τὰ μέρη τὰ αὐ τὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆ ς εὐ θείαις· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

=================================

Ι8 . Ἐὰν δύ ο τρίγωνα τὰς δύ ο πλευρὰς [ταῖς] δύ ο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, œeV dὲ καὶ τὴ ν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴ ν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴ ν ὑ πὸ τῶν ἴσων εὐ θειῶν περιεχομένην.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύ ο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύ ο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύ ο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν

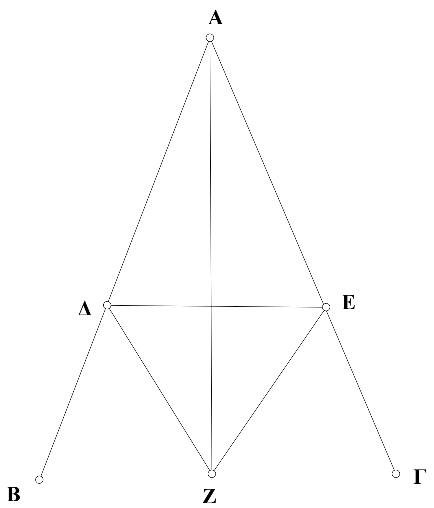
Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

AB tÍ DE t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ·
™œšt w dὲ καὶ βάσιν τὴ ν ΒΓ βάσει
τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅ τι καὶ γωνία
ἡ ὑ πὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑ πὸ ΕΔΖ
ἐστιν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον
kaˆ tiqemšnou toà mὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον
tÁj dὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σει καὶ τὸ Γ
shme‹on ™pˆ tÕ Z di¦ tÕ ‡shn εἶναι τὴ ν ΒΓ τῇ ΕΖ·
ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σουσι καὶ
αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. e„ g¦r b£sij mὲν ἡ ΒΓ
ἐπὶ βάσιν τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σει, aƒ dὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ
ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐ κ ἐφαρμό σουσιν ἀλλὰ παραλλάξου-
σιν ὡ ς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐ τῆς
εὐ θείας δύ ο ταῖς αὐ ταῖς εὐ θείαις ἄλλαι δύ ο εὐ θεῖαι
ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸ ς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ
τὰ αὐ τὰ μέρη τὰ αὐ τὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται
δέ·**(I.7)**οὐ κ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴ ν ΕΖ
βάσιν οὐ κ ἐφαρμό σουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ
τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμό σουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ
ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴ ν ὑ πὸ ΕΔΖ ἐφαρμό σει καὶ ἴση αὐ τῇ
ἔσται. ·(Κ.Ε.4)

Ἐὰν ἄρα δύ ο τρίγωνα τὰς δύ ο πλευρὰς [ταῖς] δύ ο πλευ-
ραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴ ν βάσιν τῇ βάσει
ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴ ν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴ ν ὑ πὸ
τῶν ἴσων εὐ θειῶν περιεχομένην· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.
===

I9. Τὴ ν δοθεῖσαν γωνίαν εὐ θύ γραμμον δίχα τεμεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐ θύ γραμμος ἡ ὑ πὸ ΒΑΓ. δεῖ

δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

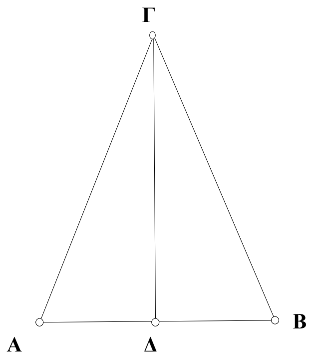
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ,(I.3) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, ·(Αιτ.1) καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, (I.1)καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, koin¾ dὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν. (I.8)

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I10. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

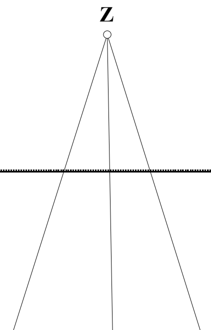
Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ(I.1), καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ(**I.9**)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, koin¾ dὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.**(I.4)**

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

===

I11.Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

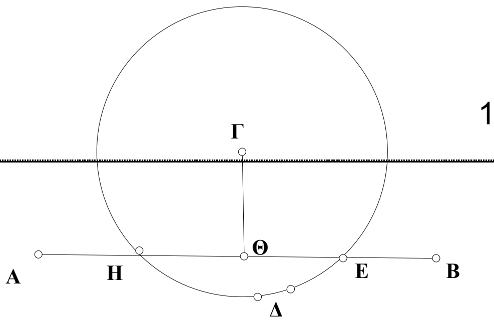
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, **(I.3)** καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, **(I.1)** καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· (Αιτ.1) · λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, koin¾ dὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν· **(I.8)** καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ótan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· **(Ορ.10)** ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==================================

I.12 Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB τὸ δὲ δο-
qὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν
δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος

σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν
γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, kaˆ kšntrJ mὲn tù G diast»mati dὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, **(Αιτ.3)** καὶ τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, **(I.10)** καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· **(Αιτ.1)** λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

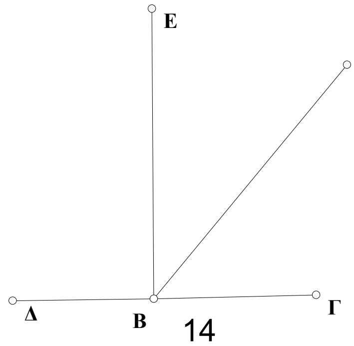
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, koin¾ dὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση. **(I.8)** καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ótan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

===

I13

Εὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



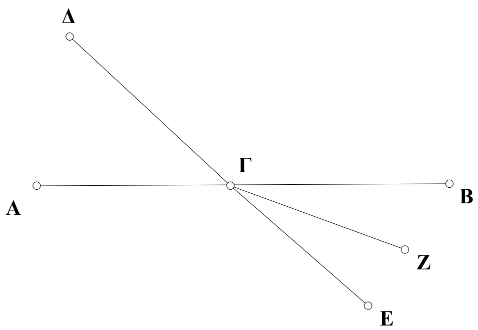
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. **(ορ.10)**

E„ mὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. e„ dὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ·**(Ι.11)** αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. **(κ.Ε.2)**πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι **(κ.Ε.2** εἰσίν. ™de.cqhsan dὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· **(κ.Ε.1)** καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

Ι14 Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πρός γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-

μείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ. **(Αιτ.2)**

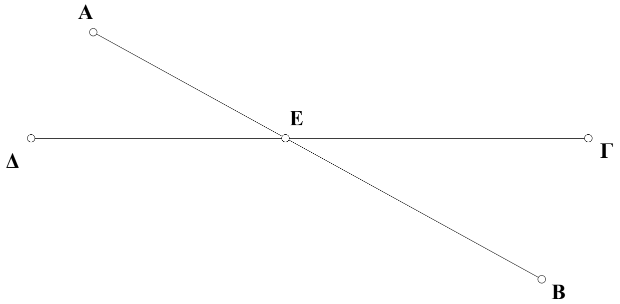
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· **(I.13)**e„sˆ dὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι **(Αιτ.2 και Κ.Ε4)** εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· **(Κ.Ε.3)**
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, Óti oÙdὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται

γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.15. **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.**



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστˆn ¹ mὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ¹ dὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. **(I.13)**πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γω-

νίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. **(Ι.13)** ™de.cqhsan dὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. **(Αιτ.4 και Κ.Ε1)**
κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· **(Κ.Ε.3)**
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

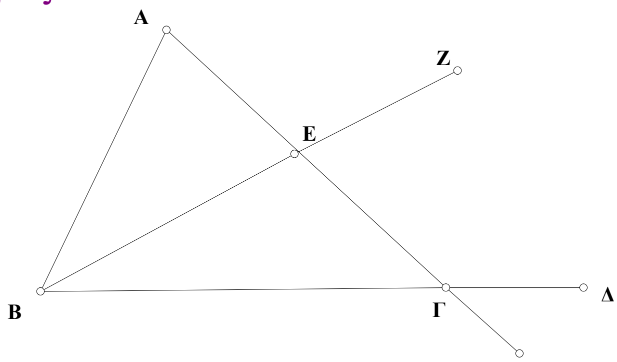
==

[Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.]

==

Ι.16.Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, **(ι.10)** καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, **(Ι.3)**
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, **(Αιτ.1)** καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η. **(Αιτ.2)**

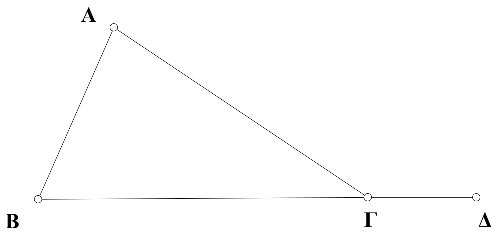
Ἐpeˆ oân ‡sh ™st ˆn ¹ mὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ¹ dὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα

ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ·**(Ι.15)** βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·**(Ι.4)** ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ·(κρυφό αξ.6) ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

Ι.17. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

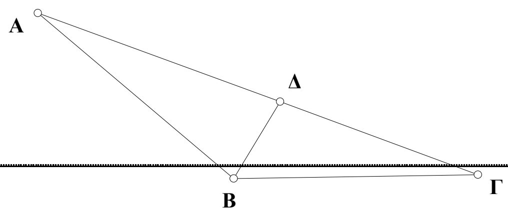
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. **(Αιτ.2)**

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. **(Ι.16)** κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·**(Ι.13)** αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.**(Κ.Ε.6*)**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

Ι.18. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴ ν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅ τι καὶ γωνία ἡὑ πὸ ΑΒΓ μεί-
ζων ἐστὶ τῆς ὑ πὸ ΒΓΑ.

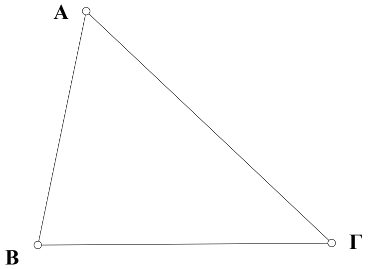
Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. ·(Αξ.1)

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτό ς ἐστι γωνία ἡὑ πὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸ ς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑ πὸ ΔΓΒ· **(Ι.16)** ἴση δὲ ἡὑ πὸ ΑΔΒ τῇὑ πὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡὑ πὸ ΑΒΔ τῆς ὑ πὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡὑ πὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑ πὸ ΑΓΒ.

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴ ν μείζονα γωνίαν ὑ ποτείνει· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

Ι.19.Παντὸ ς τριγώνου ὑ πὸ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑ ποτείνει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴ ν ὑ πὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑ πὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅ τι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ

μείζων ἐστίν.

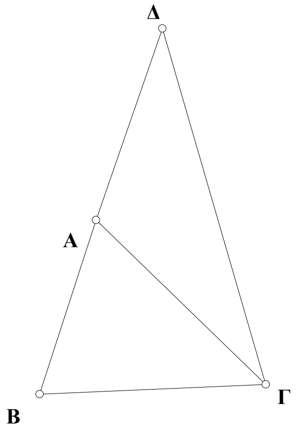
Εἰ γὰρ μή, ἤ τοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων··(κρυφό αξ.7) ‡sh mὲν οὖν οὐ κ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡὑ πὸ ΑΒΓ τῇὑ πὸ ΑΓΒ· **(Ι.5)**οὐ κ ἔστι δέ· οὐ κ ἄρα ἴση

ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οÙdὲ μὴ ν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ
τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΒΓ τῆς
ὑ πὸ ΑΓΒ· **(I.18)** οὐ κ ἔστι δέ· οὐ κ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ
τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, Óti οÙdὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν
ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ·(κρυφό αξ.8)

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου ὑ πὸ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑ ποτείνει· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I.20 **Παντὸ ς τριγώνου αἱ δύ ο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό μεναι.**



῞ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅ τι τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου αἱ δύ ο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ
μεταλαμβανό μεναι, af mὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, af dὲ ΑΒ,
ΒΓ τῆς ΑΓ, af dὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον,
καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύ χθω ἡ ΔΓ.

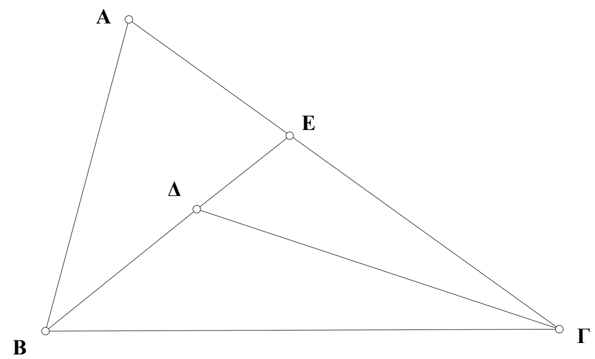
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ,
ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΔΓ τῇ
ὑ πὸ ΑΓΔ· **(I.5)** μείζων ἄρα ἡ ὑ πὸ ΒΓΔ
τῆς ὑ πὸ ΑΔΓ· **(K.E.5)** καὶ ἐπεὶ τρίγωνό ν ἐστι
τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴ ν ὑ πὸ ΒΓΔ
γωνίαν τῆς ὑ πὸ ΒΔΓ, ØpÕ dὲ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑ ποτείνει, **(I.19)** ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων.
‡sh dὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ·
ὁ μοίως δὴ δείξομεν, Óti kaˆ af mὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ
μείζονές εἰσιν, af dὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου αἱ δύ ο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό μεναι· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I.21 **Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύ ο εὐ θεῖαι ἐντὸ ς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοι-**

pîn toà trigènou dÚo pleurîn ™l£ttonej mὲν ἔσονται, me.zona dὲ γωνίαν περιέξουσιν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συν-εστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, me.zona dὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, **(I.20)** τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσ-κείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

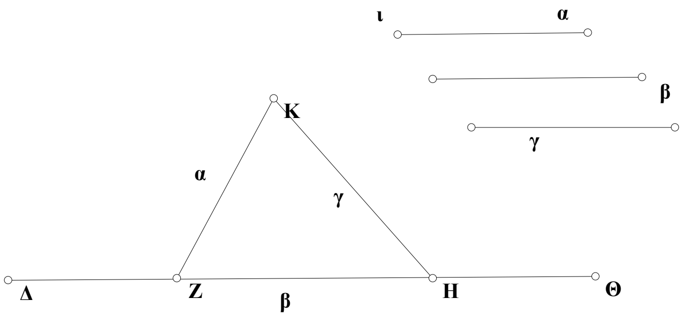
Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, **(I.16)** τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, me.zona dὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.22 Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις

[εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· dex dὲ τὰς δύο τῆς loipÁj me.zonaj εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζο-naj εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας]. (I.20)



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανό-μεναι, af mὲν Α, Β τῆς Γ, af dὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

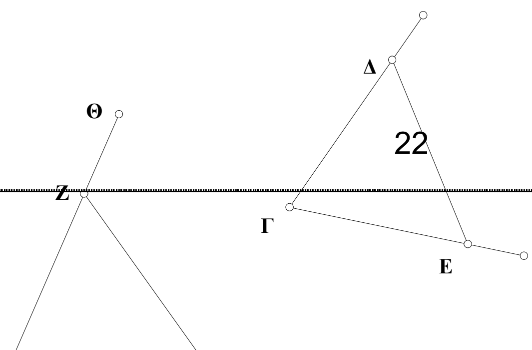
'Ekke.sqw tij eÙqe.a ¹ DE peperasmšnh mὲν κατὰ τὸ D ¥peiroj dὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ mὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, tÍ dὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, tÍ dὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· (I.3)καὶ κέντρῳ mὲν τῷ Ζ, diast»mati dὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· p£lin kšntrJ mὲν τῷ Η, diast»mati dὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον·(Ορ.16) ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύ-κλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. ·(K.E.1) καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. ·(K.E.1) πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον·(Ορ.16) ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ™stˆ dὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγω-νον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅ περ ἔδει ποιῆσαι.

==

I .23 Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mèn δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, tÕ dè πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ¹ dè δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

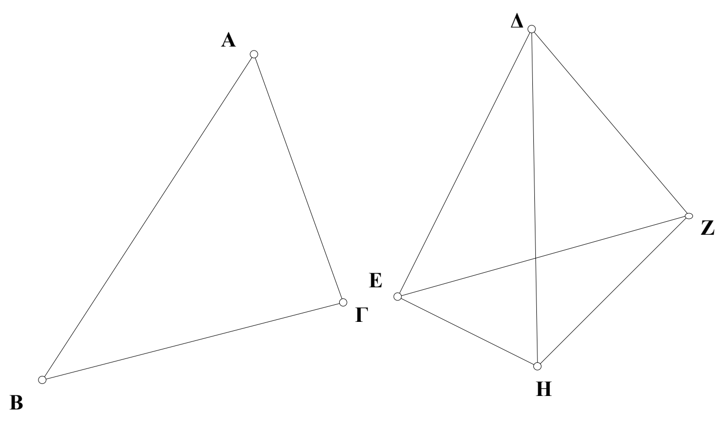
Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, éste ‡shn εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, t¾n dè ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.**(I.22)**

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστιν ἴση. **(I.8)**

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I.24 Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dè γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ῎Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ¹ dὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

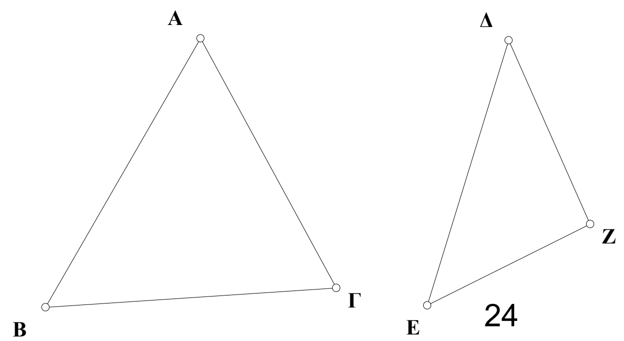
Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ,**(I.23)** καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

'Epeˆ oân ‡sh ™st^n ¹ mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ¹ dὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. **(I.4)**πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ·**(I.5)** μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ØpÕ dὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ.**(I.19)** ‡sh dὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

I.25 Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· b£sij dὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅ τι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν·

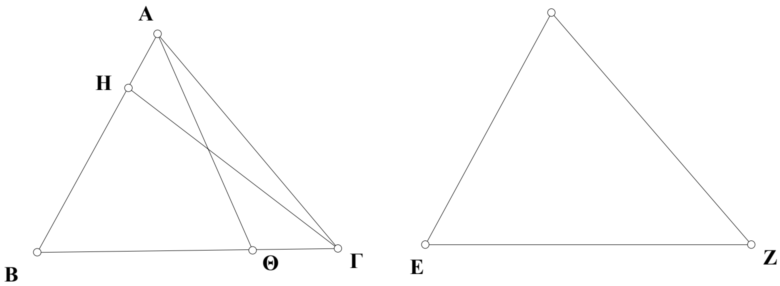
Εἰ γὰρ μή, ἤ τοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ‡sh mὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ(**I**.4)· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· oÙdὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ·**(I.24)** οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν

ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ™de.cqh dὲ ὅ τι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερα, t¾n dὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I26 **Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤ τοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.**



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ὑπὸ

ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, t¾n dὲ ὑπὸ
ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ™čštw dὲ καὶ
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην,
πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις
γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω,
ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς
λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ
tÍ DE t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ
γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων
ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ,
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

'Epeˆ oân ‡sh ™stˆn ¹ mὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ¹ dὲ ΒΓ τῇ ΕΖ,
δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα
ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση
ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ
ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοι-
παὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· **(I.4)** ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ
ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση·
καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων
τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ
ΔΕ. ἴση ἄρα. œsti dὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ,
ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις
ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ
ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. **(I.4)**

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευ-
ραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι
καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται,
¹ mὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ¹ dὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ
ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων
ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ
ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. kaˆ ™peˆ ‡sh ™stˆn ¹ mὲν
BQ tÍ EZ ¹ dὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς
ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας
περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ
τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ
λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· **(I.4)** ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ
γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν
ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ
ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ
ἀδύνατον. **(I.16)** οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα.
™stˆ dὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς

ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση. **(I.4)**

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

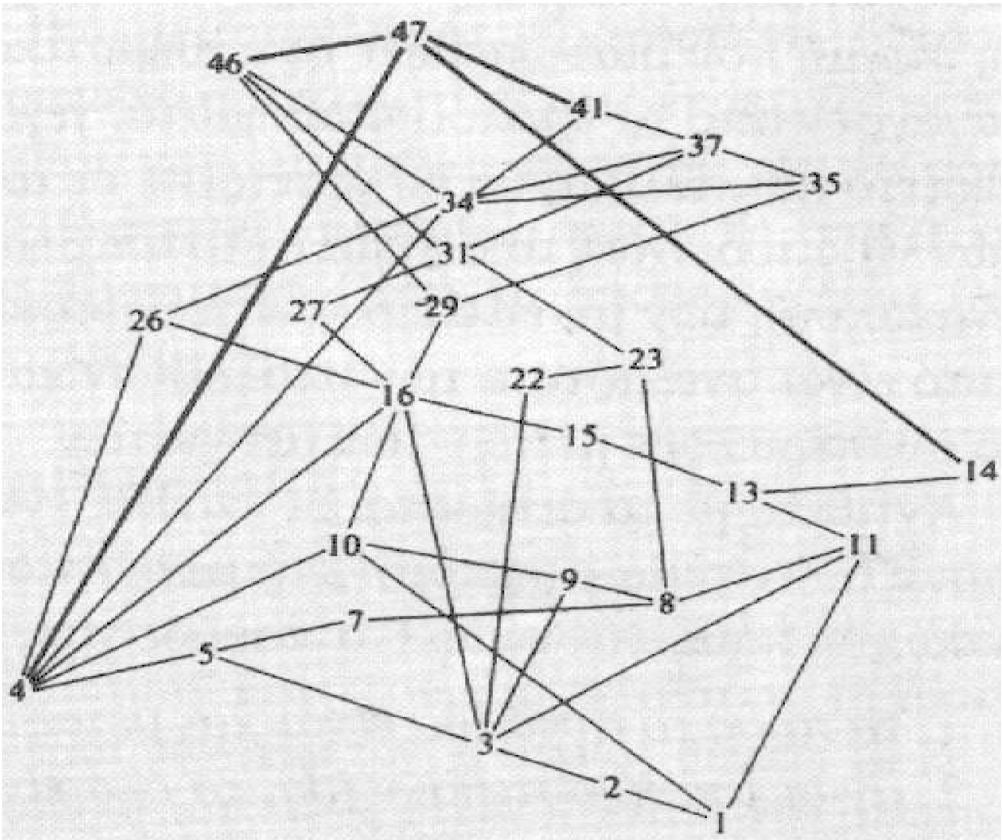
<u>Πίνακας λογικής διάθρωσης των προτάσεων Ι.1-Ι.26 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη</u>

(α/α) Ι.	Προτάσεις	Αξιώματα	Όροι	Κοινές έννοιες	Κρυφά αξιώματα*
1	-	3,1	15,20 15	1	Αξίωμα συνεχείας
2	1	1,2,3,3	15	3,1	
3	2	3	15	1	
4	(2)			4,4, 9*	
5	3,4	2,1	20	3,3	
6	3,4				1,2,3
7	5,5				4,5
8	7			4	
9	1,3,8	1			
10	1,4,9				
11	1,3,8	1	10		
12	8,10	3,1			

13	11	2,2		1,3	
14	13	2,4		1,3	
15	13,13	1,2		5	
16	3,4,10,15	1,2,			6
17	13,16	2		6*	
18	16	1			
19	5,18				7, 8
20	5,19			5	
21	20,20,16,				
22	3		16,16	1,1	
23	8,22	1			
24	4,5,19,23	1			
25	24				
26	4,4,3	1,1			

Η παραπάνω λογική διάθρωση δείχνει τις προαπαιτούμενες και το είδος κάθε πρότασης που χρησιμοποιούνται σε κάθε απόδειξη.
Καταφαίνεται έτσι ότι η σειρά δόμησης είναι αυστηρή σε μια οιονεί διαδικασία οικοδόμησης .
Φυσικά σε όλες τις προτάσεις, οι προαπαιτούμενες έχουν παρατεθεί στο βιβλίο σε πρότερη θέση. Μέχρι πρόσφατα, αλλά και σήμερα , κάποιες από τις προσπάθειες επέμβασης στην Ευκλείδεια αντίληψη είναι η αλλαγή στην σειρά κάποιων προτάσεων, χωρίς να μεταβληθεί η δομή τις εξάρτησης των επόμενων από τις προηγούμενες προτάσεις.

Μια εδεικτική λογική διάθρωση ενός σπουδαίου θεωρήματος , του Πυθαγορείου .



Στο πάρα πάνω σχήμα οι αριθμοί υποδηλώνουν την αρίθμηση των προτάσεων στο βιβλίο Ι. των Στοιχείων .(Από το «The Greek Concept of Proof» σειρά MA290 : Topics in the history of Mathematics, του Αγγλικού Ανοικτού Πανεπιστημίου)

ΤΑ ΚΡΥΦΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Τα παρακάτω «κρυφά αξιώματα» , είναι μια ομάδα , που ο Ευκλείδης θα μπορούσε να συμπεριλάβει στις **κοινές έννοιες** , αλλά δεν ετέθησαν .Υπάρχουν στις προτάσεις Ι.6 , Ι.7 , Ι.16 , Ι.17 , Ι.19. Παρατίθενται με λεκτική διατύπωση , αλλά και με σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

1. Αν δύο μεγέθη δεν είναι ίσα, τότε θα είναι άνισα.(Αν [όχι $χ=ψ$], τότε [$χ<ψ$ ή $χ>ψ$])……………(Ι.6)

2.Δύο μεγέθη δεν μπορούν ταυτοχρόνως να είναι και ίσα και άνισα   (Ι.6)

3. Δύο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση. (Αν το χ δεν είναι διάφορο του ψ , τότε θα είναι ίσο μ΄ αυτό)[Αν όχι (χ διάφορο του ψ) , τότε χ=ψ]……………………………………..(Ι.6)

4. Το μικρότερο από κάτι , θα είναι μικρότερο κι απ΄ το ίσο προς αυτό.(Αν χ<ψ και ψ=ω , τότε χ<ω)………………………………(Ι.7)
5. Μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας (Αν χ<ψ και ψ<ω , τότε χ<ω (Ι.7)
6.Αν δύο μεγέθη είναι ίσα και ένα εξ αυτών άνισο προς τρίτο, τότε και το άλλο ομοίως άνισο προς το τρίτο (Αν χ=ψ και ψ<ω , τότε χ<ω) (Ι.16)
7.Αν ένα μέγεθος δεν είναι υπέρτερο άλλου, τότε το άλλο θα είναι υπέρτερο ή ίσο (Αν όχι[χ>ψ] τότε [χ<ψ ή χ=ψ](Ι.19)
8. Αν ένα μέγεθος δεν είναι έλασσον άλλου κι όχι ίσον, τότε θα είναι μείζον (Η αντιθετοαντίστροφη πρόταση της προηγουμένης) (Ι.19)

Τουλάχιστον τις παρατηρήσεις επί της Ι.19 έχει κάνει ο λογικιστής φιλόσοφος Frege .

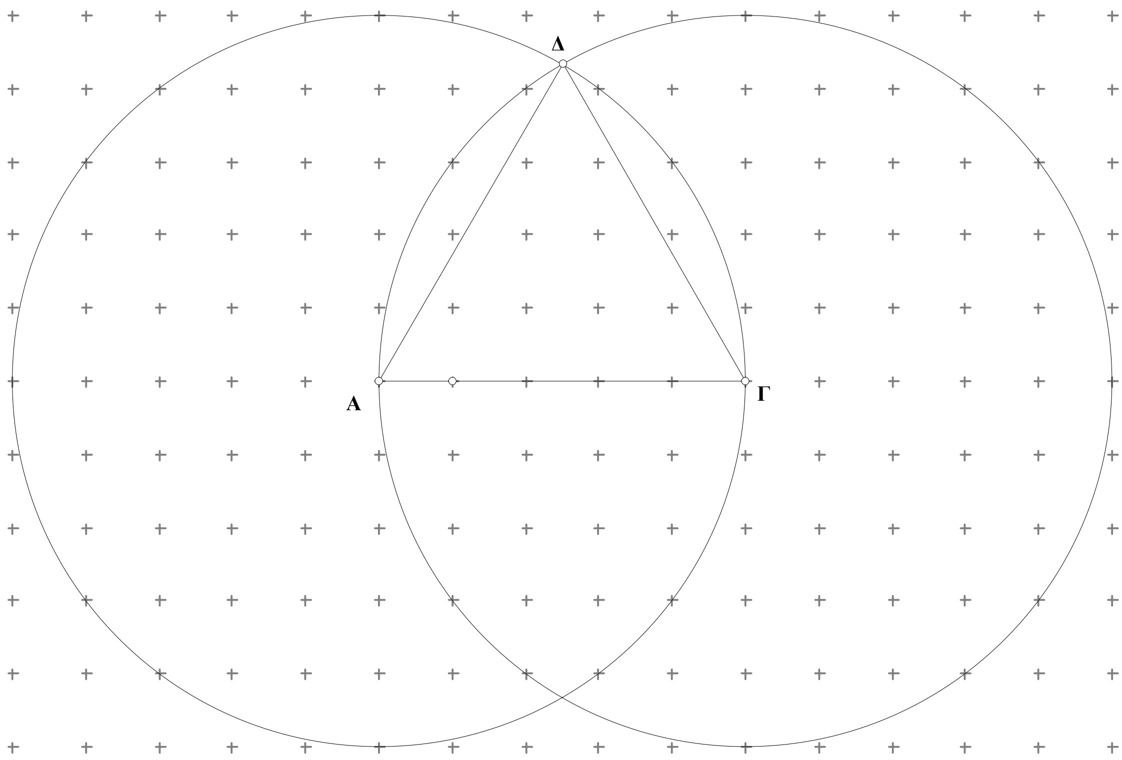
ΑΛΛΑ ΚΡΥΦΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

*(i)Το αξίωμα της **συνέχειας** και του **μεταξύ***

Στην απόδειξη της Ι.1 (Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου από την πλευρά του)υπονοείται ,ότι οι δύο κύκλοι που χρειάζονται για την κατασκευή **τέμνονται,** κάτι που ο Ευκλείδης ίσως να θεώρησε προφανές, αλλά ίσως και όχι.Έθεσε την πρόταση αυτή πρώτη στα Στοιχεία του , **ίσως για να δείξει την μεγάλη σημασία της,** αφού και με μόνη την χρήση αυτής, μεταγενέστεροι μαθηματικοί έδειξαν ότι:

- Αν Α και Β σημεία που ευρίσκονται στο εσωτερικό και εξωτερικό κύκλου , τότε η ΑΒ τέμνει τον κύκλο.
- Κάθε ευθεία που διέρχεται από εσωτερικό σημείο κύκλου, τον τέμνει σε δύο σημεία.
- Τα α, β, γ αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου , αν και μόνο αν κάθε ένα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων.
- Αν δύο κύκλοι (Α, α) και (Β,β) έχουν ΑΒ=γ , και κάθε ένα από τα α, β, γ είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων, τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

Βεβαίως υπέθεσε ο Ευκλείδης ότι ο κύκλος είναι **συνεχής γραμμή** που δεν μπορεί να θεωρηθεί προφανές.
Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:
Αν θεωρήσω τον χώρο : ; Q^{22} και επιχειρήσω να κατασκευάσω ισόπλευρο τρίγωνο με την Ευκλείδεια μέθοδο, ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $α \in Q$, τότε με απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής $(χ,ψ) \notin Q^2$ αφού ψ∈Ñ\:Q. .



Στα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα θεμελίωσης της Γεωμετρίας η τομή των δύο κύκλων εξασφαλίζεται από τα αξιώματα της **συνέχειας** και του **μεταξύ.**
Τον 19^{o} αιώνα ο Pash εισήγαγε (1882) την έννοια του **μεταξύ για τρία σημεία**.
Το σύστημα αυτό βελτιώθηκε (βελτίωση σημαίνει συρίκνωση του αριθμού μη οριζόμενων στοιχείων ή αξιωμάτων) από τον Peano (1889) υπήρξε και το σύστημα του Pieri (1889)
Τον 20ο αιώνα το σύστημα Veblen (1904) που βελτίωνε το του Pash του Forder (1924) , Robinson(1940) Levi (1960)κ.λπ.
Την μεγάλη θέση όμως ανάμεσα σε όλα τα συστήματα , καταλαμβάνεουν τα συστήματα των Hilbert-Ευκλείδη (1899) και Birkhoff (1932)

Αναφέρουμε το αξίωμα του Pash (Αξίωμα του «μεταξύ»)

Έστω τρία σημεία Α,Β,Γ, μη κείμενα επί της ιδίας γραμμής, και έστω (ε) μία γραμμή επί του επιπέδου (ΑΒΓ) η οποία δεν διέρχεται από κανένα από τα Α, Β, Γ.

Τότε: Αν η (ε) διέρχεται από σημείο του τμήματος ΑΒ, θα διέρχεται και από σημείο του τμήματος ΑΓ ή ΒΓ.

Αξίωμα του Dedekint (Αξίωμα της συνέχειας)

Για κάθε διαμέριση των σημείων μιας γραμμής σε δύο μη κενά σύνολα , έτσι ώστε κανένα σημείο του ενός συνόλου να κείται μεταξύ των σημείων του άλλου,, υπάρχει σημείο του ενός συνόλου , το οποίο κείται μεταξύ κάθε στοιχείου του ιδίου συνόλου και κάθε στοιχείου του άλλου συνόλου.

Όμως ο μέγιστος ιστορικός της μαθηματικής επιστήμης Sir Thomas Heath μας λέει ότι το αίτημα 3 , δηλαδή το πώς «με κάθε κέντρο και με κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος, αυτό μας εξασφαλίζει και το άπειρον του Ευκλειδείου χώρου, αλλά και την συνέχεια . Προφανώς η λέξη «κάθε» εξασφαλίζει το «οσοδήποτε μεγάλη ακτίνα και οσοδήποτε μικρή» , εκφράσεις που παραπέμπουν κατ' ουσίαν σε σύγχρονους «εψιλοντικούς» ορισμούς για το άπειρο και το απειροστό.

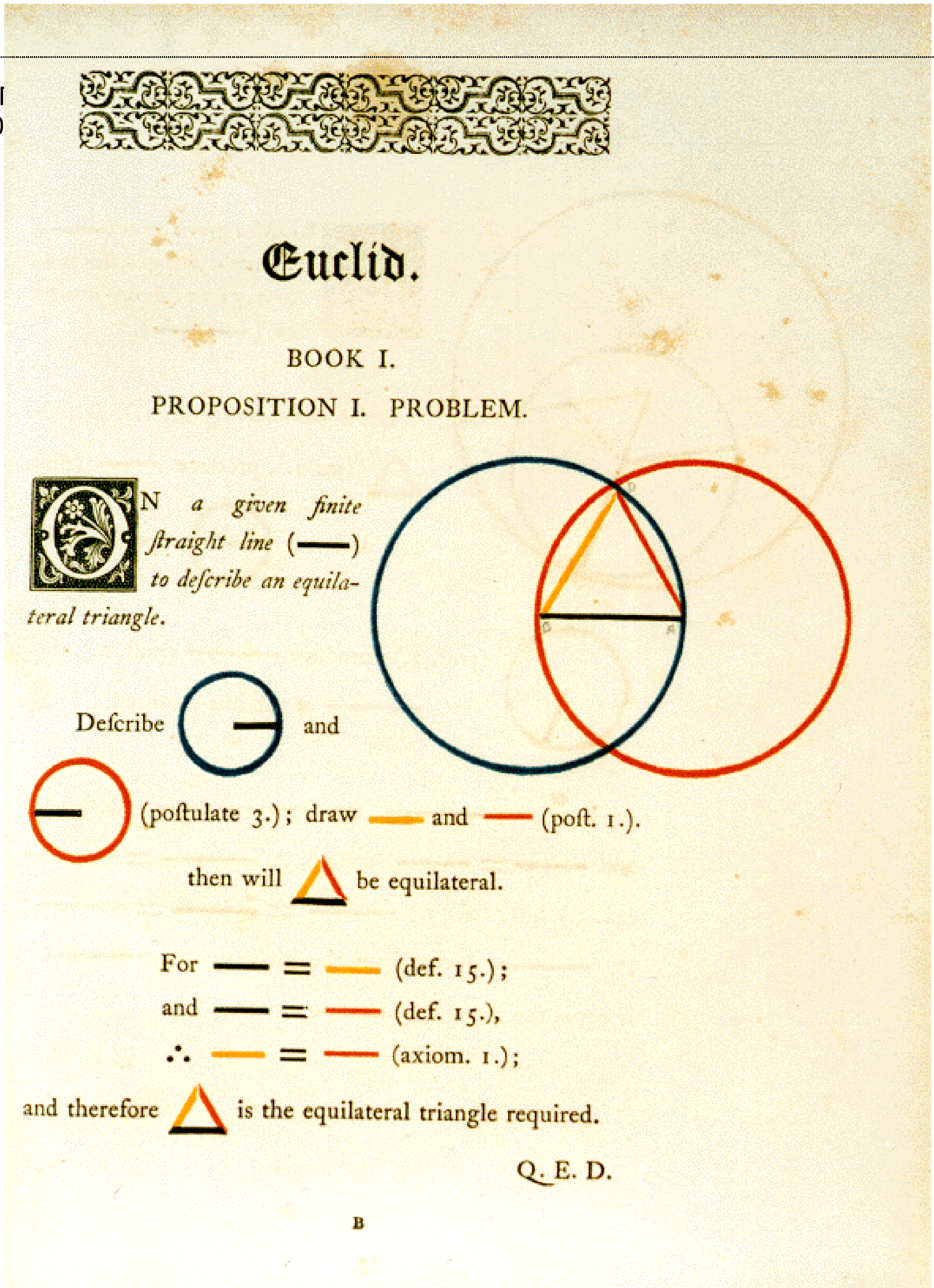
(ii)Το αναλλοίωτο των σχημάτων κατά την μετακίνηση- επίθεση (υπέρθεση) των σχημάτων

Στις αποδείξεις των Ι.4 και Ι.8 , ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μέθοδο **της υπέρθεσης** (επίθεσης) δύο σχημάτων. Φαίνεται να είναι μια πολύ αρχαιότερη του Ευκλείδη μέθοδος αποδείξεως, την χρήση της οποίας αποφεύγει να κάνει ο Ευκλείδης και την χρησιμοποιεί μόνο στις προειρημένες δύο προτάσεις, παρ΄ ότι εύκολα λ.χ. τις Ι.2 και Ι.3 πράγμα που δεν κάνει. Η μέθοδος αυτή έχει υποστεί την κριτική ότι είναι **μηχανική** υπονοώντας έναν οιονεί πειραματικό χαρακτήρα , πράγμα που κατά την γνώμη πολλών είναι υπερβολικό έως άτοπο , αφού **είναι σαφής ο στοχαστικός χαρακτήρας** της υπέρθεσης των σχημάτων.
Όπωσδήποτε όμως, το ότι κατά την μετακίνησή του το σχήμα μένει αμετάβλητο, τουλάχιστον με την οπτική που επιβάλουν τα σύγχρονα μαθηματικά **δεν είναι προφανές,** αν και κατά την γνώμη άλλων σχολιαστών (Σερ Thomas Haeth) το $4^{ο}$ Αίτημα της ισότητας όλων των ορθών γωνιών , ουσιαστικά ισοδυναμεί με την **αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων** ή της **ομοιογένειας του χώρου**.
Ο συλλογισμός που παραθέτει ο Heath είναι ο εξής:
Το αίτημα 4, καταχωρίζεται συχνά ως θεώρημα. Αλλά σε κάθε περίπτωση θα έπρεπε κα καταχωριστεί πριν από το αίτημα 5, για τον λόγω του ότι αυτό δεν θα αποτελούσε κριτήριο για το αν οι ορθές αποτελούν καθορισμένα μεγέθη.. Αν λοιπόν το αίτημα 4 επρόκειτο να αποδειχθεί ως θεώρημα, θα μπορούσε να αποδειχθεί με ένα ζεύγος προσκειμένων ορθών γωνιών σε ένα άλλο ζεύγος γωνιών Αυτή η μέθοδος δεν θα μπορούσε να ισχύσει , παρά μόνο με βάση την αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων., η οποία θα έπρεπε να καθιερωθεί ως αίτημα προηγούμενο. Ο ευκλείδης λοιπόν, προετίμησε να επιβεβαιώσει με αίτημα ότι όλες οι ορθές είναι ίσες, πράγμα που ισοδυναμεί με την αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων ή της ομοιογένειας του χώρου.
Στην σύγχρονη θεμελίωση του Hilbert η πρόταση Ι.4 αποτελεί αξίωμα και μάλιστα όπως ο Hilbert απέξειξε, ανεξάρτητο από τα άλλα .

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

(iii) Δύο παρατηρήσεις στα αξιώματα 1 και 2

Το Αίτημα 1 εξασφαλίζει την **ύπαρξη** ευθείας , αλλά **όχι την μοναδικότητά της**, κάτι που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στα στοιχεία του.
Επίσης, το Αίτημα 2 ,μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να εκτείνουμε ευθύγραμμο τμήμα **συνεχώς και ευθυγράμμως**, κάτι που δεν είναι απολύτως σαφές ότι η ευθεία έχει άπειρο μήκος. Αυτά , σύμφωνα με κάποιες (μάλλον υπερβολικές) κριτικές. (Carle B.Boyer-Uta C. Merzbach "Ιστορία Μαθηματικών"Εκδόσεις Πνευματικού ΑΘΗΝΑ –1977) Κατά την γνώμη μας όμως , η κριτική αυτή είναι και άτοπη , αφού η σύγχρονη έννοια του απείρου απαιτεί την **απεριόριστη μεγέθυνση** , κάτι που είναι κοινός τόπος μεταξύ των μαθηματικών . Δηλαδή , κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως κατά **όσο (προφανώς) θέλουμε**, άρα έχει άπειρο μήκος.
Ο σχολιασμός του **Sir Thomas Haeath** επί των αιτημάτων 1 και 2 , είναι ότι το δεύτερο σε σχέση με το πρώτο εξασφαλίζει την μοναδικότητα της ευθείας που ορίζουν δύο σημεία , αφού το πρώτο εξασφαλίζει την μοναδικότητα του ευθυγράμμου τμήματος , ενώ με την δυνατότητα απεριόριστης προέκτασης που έχουμε με το δεύτερο, έχομε το συμπέρασμα και για την ευθεία. Επί πλέον ο **Heath** ισχυρίζεται , ότι τα δύο αυτά αιτήματα, εξασφαλίζουν το ότι δύο ευθείες δεν μπορούν να περικλείουν επιφάνεια και ότι (συνεπώς) το «κρυφό αξίωμα» που παραθέτει ο Ευκλείδης στην Ι.4 (Δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια)δεν χρειάζεται.
Επίσης **ο Heath** διετύπωσε , ότι το αίτημα 2, συνεπάγεται το θεώρημα που έθεσε ως πόρισμα της Ι.11 **ο Simson** , ότι δηλαδή αν δύο ευθείες έχουν κοινό ευθ. τμήμα, τότε συμπίπτουν.



Euclid.

BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.

On a given finite ſtraight line (—) to deſcribe an equilateral triangle.

Deſcribe and (poſtulate 3.); draw and (poſt. 1.).

then will be equilateral.

For = (def. 15.);

and = (def. 15.),

∴ = (axiom. 1.);

and therefore is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

B

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

Μια περίεργη και πρωτοποριακή έκδοση των πρώτων 6 βιβλίων του Ευκλείδη έγινε το 1847 από τον Oliver Byrne. Δίνει έμφαση στο χρώμα και την σχηματικότητα των αποδείξεων , ώστε να είναι προσιτή με τους ελάχιστους δυνατούς γλωσσικούς φραγμούς. Εδώ οι προτάσεις I.1 , I.2 , I.3
http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.html

Βιβλιογραφία:

1) «Ευκλείδου Γεωμετρία» Ε.Σ. Σταμάτη –Εκδ. οίκος Νικ. Α. Σάκκουλα-Αθήναι 1952
2) «Η Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» Sir Thomas Heath –Έκδοση ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ. Αθήνα 2001
3) «Ευκλείδη Στοιχεία»Τόμος I - Εκδόσεις ΚΕ.ΕΠ.ΕΚ. –Αθήνα 2001
4) Euclid ,The thirteen Books of the Elements Vol1. –Sir Thomas Heath –Dover Rublications Inc. --New York
5) Ιστορία των Μαθηματικών –Courla B. Boyer Uta.C. Merzbach –Εκδ. Πνευματικού –Αθήνα 1977
6) Πρακτικά 14ου Μαθηματικού Συνεδρίου- Μυτιλήνη 1997 (Έυκλείδειες Γεωμετρίες –Γιάννης Αραχωβίτης)

Διαδίκτυο

1) http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
2) http://www.perseus.tufts.edu/cgi-bin/ptext?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0086&layout=&query=toc&loc=9.1
3) http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.html